(PETITE) MÉTHODOLOGIE IV CORRECTION

DÉNOMBREMENT.

Le but de ce travail est de passer en revue les méthodes qui permettent de faire des dénombrements : compter des mains qui satisfont à différentes contraintes dans un jeu de cartes, le nombre de tirage de boules possibles dans une urne ; avec et sans remise, etc.

Ces techniques sont plutôt du ressort du programme de ECE 1 mais les questions de dénombrement apparaissent systématiquement dans les sujets de concours.

Dans cet séance de méthodologie, nous utiliserons la terminologie suivante (qui n'est peut-être pas exactement celle de ECE 1).

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Une k-liste ou une liste de longueur k est un k-uplet d'éléments de E.

2. Un k-arrangement est une liste de E dont les éléments sont deux à deux distincts.

3. Une combinaison de k éléments parmi n est une partie de k éléments de E.

La différence fondamentale entre les listes et les parties réside dans le fait que pour les listes, on tient compte de l'ordre des éléments. Plus précisément, la liste à deux éléments à (e_1, e_2) est différente de la liste (e_2, e_1) tandis que la partie $\{e_1, e_2\}$ est égale à la partie $\{e_2, e_1\}$.

Tous les problèmes de dénombrements se ramènent, soit à faire un décompte à la main, soit à utiliser une ou plusieurs des formules suivantes.

Exercice 1.- ***Préliminaires.*** **1.** Rappeler la formule qui donne le nombre de listes de longueur k dans un ensemble E à n éléments.

2. Même questions pour les arrangements.

3. Même question pour les parties.

Correction 1.- **1.** Il y en a n^k : il s'agit de faire k fois un choix parmi n éléments.

2. Il y en a
$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$
En effet, pour le premier choix, il y a n possibilités (n'importe quel élément de E), pour le deuxième, il y en a $n-1$ (n'importe quel élément de E, sauf celui qui a été choisi en premier) et ainsi de suite jusqu'au $k^{\text{ième}}$ choix pour lequel tous les éléments de E sauf ceux qui ont déjà été choisis sont autorisés.

3. C'est le nombre de parties de k éléments dans un ensemble à n éléments : il y en a
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 2.-
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules dans cette urne

1. avec remise et on tient compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?
2. sans remise et on tient compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?
3. avec remise et on ne tient pas compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?
4. sans remise et on ne tient pas compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?

Correction 2.-
Dans le premier cas, un tirage est une liste de k éléments dans un ensemble n éléments. Il y a donc n^k tirages possibles. Dans le second cas, il s'agit d'un arrangement de longueur k (on tient compte de l'ordre et les éléments sont distincts). Il a donc $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ possiblités. Dans le dernier cas, un tirage nous donne une partie à k éléments dans un ensemble à n éléments, il y en a donc $\binom{n}{k}$. Bien noter que tirer des boules sans remise et sans tenir compte de leur ordre d'apparition est équivalent à les tirer simultanément.

Le troisième cas est plus délicat. Si on tenait compte de l'ordre, il y en aurait donc n^k (c'est le premier cas). Mais ici, une permutation des boules obtenues donne la même partie. Il faut donc diviser le nombre de listes par le nombre de permutations. Or une permutation de k éléments est un arrangement de longueur k dans un ensemble à k éléments, il y en a donc $k!$ et on trouve finalement

$$\frac{n^k}{k!}$$

parties de k boules tirées avec remise.

Exercice 3.-
Combien le mot **poire** a-t-il d'anagrammes ? Combien le mot **anagramme** a-t-il d'anagrammes ?

Correction 3.-
Toutes les lettres du mot poire sont différentes. Ainsi un anagramme de poire est un arrangement de longueur 5 dans un ensemble à 5 éléments (une permutation) et il en a $5! = 120$.

Pour le mot anagramme, c'est un peu plus délicat. Si toutes les lettres étaient différentes, il en aurait eu aussi 9!. Mais on en a compté 4 fois trop car les permutations des deux **a** donnent le même mot et les permutations des deux **m** aussi. Une permutation de deux lettres et un arrangement de longueur 2 dans un ensemble à 2 éléments. Ainsi, il y a $\frac{9!}{2!\times 2!}$ anagrammes du mot anagramme.

Exercice 4.-
On dispose d'un jeu de 32 cartes avec lequel on joue au Poker : on distribue à un joueur une main de 5 cartes.

1. Combien de mains différentes peut-il recevoir ?
2. Combien contiennent un carré (4 cartes d'une même hauteur et une autre carte) ?
3. Combien contiennent une quite floche (5 cartes consécutives d'une m'eme couleur) ?
4. Combien contiennent une couleur (5 cartes d'une même couleur) ?
5. Combien contiennent un full (3 cartes d'une même hauteur et deux autres d'une même hauteur) ?
6. Combien contiennent une paire et rien de mieux ?
7. Combien contiennent exactement un roi ?

8. Combien contiennent au moins deux carreaux ?

9. Combien contiennent exactement deux piques et deux coeurs ?

10. Combien contiennent exactement un roi et deux trèfles ?

Correction 4.-
Dans cet exercice, on compte plutôt des parties.

1. Une main est une partie à 5 éléments dans un ensemble à 32 éléments. Il y en a
$$\binom{32}{5} = 201\,376.$$

2. Chaque carré (d'as par exemple) peut être accompagné d'une carte qui n'est pas un as. Il y a $\binom{28}{1} = 28$ telles cartes. Et il y a 8 hauteurs possibles. Ainsi, il y a 28×8 carrés.

3. C'est une question un peu différente, on fait un décompte à la main. Il y a quatre couleurs (carreau, coeur, pique, trèfle) et quatre hauteur pour faire un quinte floche (en comptant que l'on part de la meilleure carte, on peut faire un compte floche en partant de l'as, du roi, de la dame ou du valet). Au total, il y en a donc 16.

Remarque. La probabilité d'obtenir une quinte floche est donc
$$\frac{16}{201\,376} = 0,000079...$$

4. Il y a 8 cartes de chaque couleur. Ainsi pour obtenir une main de 5 cartes d'une seule couleur, il faut piocher 5 cartes dans un ensemble à 8 éléments. Il y a donc $\binom{8}{5} = 56$ mains possibles dans une couleur. Puis il y a 4 couleurs différentes. Il y a donc $4 \times 56 = 224$ couleurs.

5. Comptons déjà le nombre de fulls d'as par les rois (3 as et 2 rois). Pour les as, il faut choisir 3 as parmi les 4 donc $\binom{4}{3} = 4$ possibilités. Pour les rois, il faut choisir 2 rois parmi les 4 donc $\binom{4}{2} = 5$ possibilités. Il y a donc $4 \times 6 = 24$ fulls d'as par les rois. Maintenant, il y a 8 hauteurs possibles pour l'ensemble de trois cartes et 7 hauteurs possibles pour l'ensemble de deux cartes. Ainsi, il y a
$$8 \times 7 \times 24 = 1344$$
fulls.

6. Pour chaque hauteur, il y a $\binom{4}{2} = 6$ parires, donc 8×6 parires au total. Il faut maintenant compléter une de ces paires de manières à n'obtnir rien de mieux. Pour la 3ème carte, il y a une carte à prendre parmi les cartes qui ne sont pas de la même hauteur que la paire, soit $\binom{28}{1} = 28$. Pour la 4ème carte, il y a une carte à prendre parmi celles qui ne sont pas de la hauteur de celles de la paire, ni de celle de la 3ème carte, soit 24 possibilités. De même, il a 20 choix possibles pour la dernière carte. On trouve donc
$$8 \times 6 \times 28 \times 24 \times 20 = 107\,520.$$

Remarque. Il y a donc 53% de chances d'obtenir une paire.

7. Pour obtenir exactement un roi, il faut tirer une carte parmi les 3 rois et 4 cartes parmi les cartes qui ne sont pas des rois, soit
$$\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 81\,900.$$

8. Comptons plutôt les mains qui ne sont pas de ce type, c'est légèrement plus facile. Il y a 8 cartes de carreau donc pour tirer une main qui ne contient pas de carreau, il faut tirer 5 cartes parmi les 24 qui ne sont pas des carreaux, soit $\binom{24}{5} = 42\,504$. Pour fabriquer une main qui contient exactement un carreau, il faut tirer une carte parmi les 8 carreaux et 4 cartes parmi celles qui ne sont pas des carreaux. On a donc $\binom{8}{1} \times \binom{24}{4} = 85\,008$. Enfin pour obtenir le nombre de mains qui contiennent au moins deux carreaux, il faut retrancher au nombre de mains totales possibles, le nombre de mains qui contiennent un ou deux carreaux. On trouve :
$$201\,376 - 42\,504 - 85\,008 = 73\,864.$$

9. On prend deux cartes parmi les piques, deux cartes parmi les coeurs et 1 carte parmi celles qui ne sont ni pique, ni coeur, soit au total

$$\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{16}{1} = 12\,544.$$

10. Il y a $32 - 11 = 21$ cartes qui ne sont ni roi, ni trèfle. Le nombre de mains qui contiennent 2 trèfles et le roi *qui n'est pas le roi de trèfle* est

$$\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2} = 13\,230$$

et le nombre de mains qui contiennent le roi de trèfle et un autre trèfle est

$$\binom{1}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{3} = 9\,310.$$

Au total, il y donc 22 540 mains qui contiennent un roi et deux trèfles.

Exercice 5.-
On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros $1,2,\cdots, 49$. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on extrait 6 de ces boules. On obtient ainsi les numéros gagnants. L'ordre ne compte pas.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles.

2. Combien de tirages fournissent exactement 1,2,3,4,5,6 numéros gagnants ? En supposant que les tirages sont équiprobables, quelle est la probabilité de gagner au loto ?

Correction 5.- **1.** Puisque l'ordre ne compte pas, le nombre de tirages possibles est un nombre de parties, soit ici

$$\binom{49}{6}.$$

2. Pour obtenir exactement un bon numéro, il faut tirer une boule parmi les 6 bonnes boules et 5 boules parmi les 43 autres, soit

$$\binom{6}{1} \times \binom{43}{5}.$$

Le raisonnement est absolument identique pour les autres cas. Par exemple, le nombre de tirages avec deux bons numéros est

$$\binom{6}{2} \times binom434.$$

Il n'y a qu'un seul tirage avec les 6 bons numéros, la probabilité de l'obtenir est

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7 \times 10^{-8}.$$